Jedna zanimljiva nejednakost za konveksni četverokut

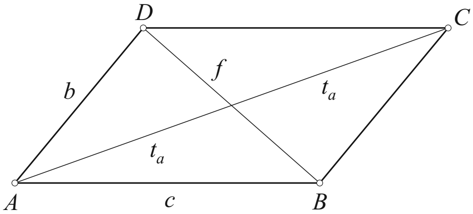
Šefket Arslanagić[1]

U knjizi *Matematika za nadarene* iz 2005. g. naveo sam neke jednakosti za trapez. Jedna od njih je

$$2ac = e^2 + f^2 - b^2 - d^2, \tag{1}$$

gdje su a i c duljine osnovica, b i d duljine krakova, a e i f duljine dijagonala trapeza. Tamo je dana i jedna posljedica nejednakosti (1) u slučaju kada je četverokut paralelogram, tj. $a = c$, $b = d$ i ona glasi

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2). \tag{2}$$



Slika 1.

Isto tako, u paralelogramu $ABCD$, stavljajući $e = 2t_a$, $f = a$, $|AB| = c$, $|AD| = b$ iz (2) dobivamo formulu za duljine težišnice trokuta koja glasi

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \tag{3}$$

i analogno

$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \qquad t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Sada ćemo dokazati jednu zanimljivu nejednakost za konveksni četverokut, koja glasi

$$2ac \geqslant e^2 + f^2 - b^2 - c^2, \tag{4}$$

gdje su a, b, c, d duljine stranica, a e i f duljine dijagonala tog četverokuta. Jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako je četverokut trapez.

Dokaz. Najprije ćemo dokazati sljedeću tvrdnju: Ako su točke M i N polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ četverokuta $ABCD$, tada vrijedi nejednakost

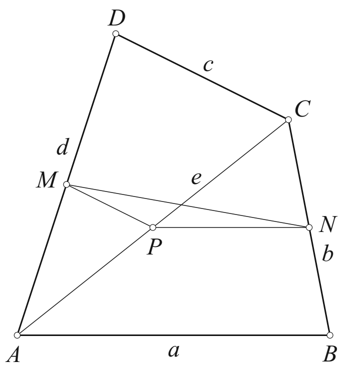
$$||AB| - |CD|| \leqslant 2|MN| \leqslant |AB| + |CD|. \tag{5}$$

Neka je točka P polovište dijagoale $\overline{AC}$ četverokuta $ABCD$ (slika 2). Tada su dužine $\overline{MP}$ i $\overline{NP}$ srednjice trokuta ACD, odnosno ABC, pa imamo $|CD| = 2|MP|$ i $|AB| = 2|NP|$.

Zbrajanjem ovih jednakosti, dobivamo

$$|AB| + |CD| = 2(|MP| + |NP| \geqslant 2|MN|), \quad \text{tj.}$$
$$2|MN| \leqslant |AB| + |CD|,$$

gdje smo koristili nejednakost trokuta.



Slika 2.

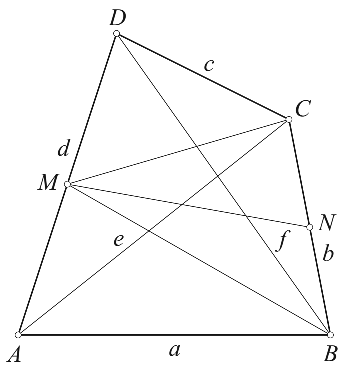
[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Oduzimanjem istih jednakosti imamo

$$||AB|-|CD|| = 2||NP|-|MP|| \geqslant 2|MN|, \quad \text{tj.} \quad ||AB|-|CD|| \leqslant 2|MN|,$$

gdje smo opet koristili nejednakost trokuta. Ovime je nejednakost (5) dokazana. U (5) vrijedi jednakost ako i samo ako je $AB\|CD$, tj. ako i samo ako je šetverokut $ABCD$ trapez. Prikažimo nejednakost (5) u obliku

$$|a-c| \leqslant 2|MN| \leqslant a+c. \tag{6}$$



Slika 3.

Sada ćemo dokazati da za četverokut $ABCD$ vrijedi jednakost

$$4|MN|^2 = a^2+c^2-b^2-d^2+e^2+f^2 \tag{7}$$

gdje su točke M i N polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ četverokuta $ABCD$. Iz (3) za trokut ADC (slika 3) imamo

$$|MC|^2 = \frac{1}{4}(2c^2+2e^2-d^2), \tag{8}$$

za trokut ABD je

$$|MB|^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2f^2-d^2), \tag{9}$$

te za trokut MBC

$$|MN|^2 = \frac{1}{4}(2|MB|^2+2|MC|^2-b^2). \tag{10}$$

Uvrštavajući (8) i (9) u (10), dobivamo

$$4|MN|^2 = \left[\frac{1}{2}\left(2a^2+2f^2-d^2\right)+\frac{1}{2}\left(2c^2+2e^2-d^2\right)-b^2\right],$$

odosno

$$4|MN|^2 = a^2+c^2-b^2-d^2+e^2+f^2,$$

a ovo je (7).

Iz desne strane nejednakosti (6), nakon kvadriranja imamo

$$4|MN|^2 \leqslant a^2+c^2+2ac. \tag{11}$$

Najzad iz (7) i (11) slijedi

$$a^2+c^2-b^2-d^2+e^2+f^2 \leqslant a^2+c^2+2ac,$$

odnosno

$$2ac \geqslant e^2+f^2-b^2-d^2,$$

a ovo je nejednakost (4), koju je trebalo dokazati. Jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako je četverokut trapez.